

ÁP ÁN THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2015

Môn thi: Vật lý

Ngày thi thử 1 (09/05/2015)

Câu 1. [10 điểm]

(a) Do lực căng dây luôn hướng về phía trục nên momen động lượng của m trong chuyển động quay quanh trục cố định bảo toàn:

$$L = mr^2 \cdot \dot{\theta} = \text{const} = L_0 = mr_0 v_0$$

Tốc độ góc của chuyển động là:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2} \quad (1)$$

(b) Xét chuyển động của hệ theo s i dây:

$$\begin{cases} M\ddot{r} = T - Mg \\ m\ddot{r} = m\omega^2 r - T \end{cases} \Rightarrow (M+m)\ddot{r} = m\omega^2 r - Mg \quad (2)$$

Thay (1) vào (2):

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{r} = m \cdot \frac{r_0^2 v_0^2}{r^4} r - Mg = \frac{mr_0^2 v_0^2}{r^3} - Mg$$

$$\Rightarrow a_M = \ddot{r} = \frac{mr_0^2 v_0^2}{(M+m)r^3} - \frac{Mg}{M+m}$$

$$(c) \text{ Tốc độ của M bằng 0} \Leftrightarrow a_M = \ddot{r} = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{mr_0^2 v_0^2}{Mg} \quad (3)$$

Bảo toàn năng lượng:

$$\frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m (v_M^2 + r^2 \omega^2) + Mg(r - r_0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (M+m) v_M^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 - Mg(r - r_0) - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 - Mg \left(\sqrt[3]{\frac{mr_0^2 v_0^2}{Mg}} - r_0 \right) - \frac{1}{2} m r^2 \frac{r_0^2 v_0^2}{r^4} \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 - Mg \left(\sqrt[3]{\frac{mr_0^2 v_0^2}{Mg}} - r_0 \right) - \frac{1}{2} m r_0^2 v_0^2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{Mg}{mr_0^2 v_0^2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + Mgr_0 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{mM^2 g^2 r_0^2 v_0^2} \end{aligned}$$

Suy ra, tốc độ lớn nhất của M:

$$v_M = \sqrt{\frac{mv_0^2 + 2Mgr_0 - 3\sqrt{mM^2g^2r_0^2v_0^2}}{M+m}}$$

(d) i u ki n m chuy n ng tròn :

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \Big|_{r=r_0} \xrightarrow{(3)} r^3 = \frac{mr_0^2v_0^2}{Mg} = r_0^3 \Rightarrow v_c = v_0 = \sqrt{\frac{Mgr_0}{m}}$$

(e) T i th i i m r = r_{min/max} → v_M = ḡ = 0

Thay vào (4):

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.r^2\omega^2 + Mg(r - r_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\text{Hay } \frac{1}{2}m.\frac{v_0^2r_0^2}{r^2} + Mg(r - r_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\text{t } \varepsilon : \quad \varepsilon = r_{\min/\max} - r_0$$

$$\frac{1}{2}m.\frac{v_0^2r_0^2}{(r_0 + \varepsilon)^2} + Mg\varepsilon = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{-2} + Mg\varepsilon = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \left[1 - 2\frac{\varepsilon}{r_0} + 3\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^2 - 4\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^3 + \dots\right] + Mg\varepsilon = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Leftrightarrow \left(Mg - \frac{mv_0^2}{r_0}\right)\varepsilon + \frac{3}{2}\frac{mv_0^2}{(r_0)^2}\varepsilon^2 - 2\frac{mv_0^2}{(r_0)^3}\varepsilon^3 + \dots = 0 \quad (5)$$

Do i u ki n: $\delta = |v_0 - v_c| \ll v_c \Rightarrow \varepsilon \ll r_0$.

Lo i b các s h ng b c cao trong (5), gi l i n b c 2 ta c k t qu :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \varepsilon = \frac{2(mv_0^2 - Mgr_0)r_0^2}{3mv_0^2} \end{cases} \\ & \Rightarrow \{r_{\min}, r_{\max}\} = \left\{ r_0, r_0 + \frac{2(mv_0^2 - Mgr_0)r_0^2}{3mv_0^2} \right\} \end{aligned}$$

Câu 2: [10 i m]

cho thu n tỉ n, trong l i gi i này, chúng ta dùng h ng s a^2 thay cho h ng s a
 \tilde{a} cho trong ph n bài g c. Ngh a là $T_2 = a^2.T_0$ thay vì $T_2 = a.T_0$.

(có l i gi i úng v i bài g c $T_2 = a.T_0$. thì trong m i k t qu d i ây,
 nh ng ch nào có a thì nh nhâ n thêm h s $1/2$ vào s m c a a)

(a) Vì các vách ng n S_1 và S_2 có th chuy n ng không ma sát đ c theo xy lanh và nhi t
 l ng c truy n m t cách ch m rãi nên áp su t các ng n luôn b ng nhau.

$$P_1 = P_2 = P_3 = P.$$

Khí ng n A_2 bi n i o n nhi t nên:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_0} = \left(\frac{T_0}{T_2} \right)^{1/(\gamma-1)} = a^{-3} \Rightarrow V_2 = a^{-3} \cdot V_0$$

$$\frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V_2} \right)^{\gamma} = a^5 \Rightarrow P_2 = a^5 P_0$$

Ng n A_3 bi n i ng nhi t nên:

$$P_3 V_3 = P_0 V_0 \Rightarrow \frac{V_3}{V_0} = \frac{P_0}{P_3} = \frac{P_0}{P_2} = a^{-5} \Rightarrow V_3 = a^{-5} V_0.$$

Vì xy lanh kín nên t ng th tích ba ng n không thay i, t ó:

$$V_1 = 3V_0 - V_2 - V_3 = (3 - a^{-3} - a^{-5})V_0$$

Suy ra nhi t ng n A_1 :

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{a^5 P_0 (3 - a^{-3} - a^{-5}) V_0}{nR} = \frac{(3a^5 - a^2 - 1) P_0 V_0}{nR} = (3a^5 - a^2 - 1) T_0$$

B ng k t qu i chi u:

	Ng n A_1	Ng n A_2	Ng n A_3
Áp su t	$a^5 P_0$	$a^5 P_0$	$a^5 P_0$
Th tích	$(3 - a^{-3} - a^{-5}) V_0$	$a^{-3} \cdot V_0$	$a^{-5} \cdot V_0$
Nhi t	$(3a^5 - a^2 - 1) T_0$	$a^2 T_0$	T_0

i chi u k t qu theo bài g c v i $T_2 = a.T_0$:

	Ng n A_1	Ng n A_2	Ng n A_3
Áp su t	$a^{5/2} P_0$	$a^{5/2} P_0$	$a^{5/2} P_0$
Th tích	$(3 - a^{-3/2} - a^{-5/2}) V_0$	$a^{-3/2} \cdot V_0$	$a^{-5/2} \cdot V_0$
Nhi t	$(3a^{5/2} - a^{2/2} - 1) T_0$	$a T_0$	T_0

(b) Nhiệt độ ra của ng n A₃:

$$Q_3 = W_{23} = nRT_0 \ln(V_0/V_3) = nRT_0 \ln a^5 = 5P_0 V_0 \ln a.$$

Do nguyên lý bảo toàn và chuyển hoá năng lượng, nhiệt lượng truyền vào ng n A₁ để chuyển hoá thành nhiệt năng của khí trong ng n A₁, A₂ và công thực hiện trên ng n A₂ vào ng n A₃ (W₂₃):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + W_{23} \\ &= nC_v(T_1 - T_0) + nC_v(T_2 - T_0) + W_{23} \\ &= \frac{3}{2}nR(T_1 + T_2 - 2T_0) + 5P_0 V_0 \ln a \\ &= \frac{9}{2}nRT_0(a^5 - 1) + 5P_0 V_0 \ln a \\ &= (4.5 \times a^5 + 5 \ln a - 4.5)P_0 V_0 \end{aligned}$$

Công của khí ng n A₁ thực hiện trên ng n A₂:

$$W_{12} = Q_1 - \Delta U_1 = \Delta U_2 + W_{23} = \frac{3}{2}nRT_0(a^2 - 1) + 5P_0 V_0 \ln a = \frac{3}{2}(a^2 - 1)P_0 V_0 + 5P_0 V_0 \ln a.$$

(c) Ng n A₁ và A₂ nén đẳng nhiệt.

$$P_1'(V_1')^\gamma = P_1(V_1)^\gamma; \quad P_2'(V_2')^\gamma = P_2(V_2)^\gamma$$

$$V_1' + V_2' = 3V_0 - V_0 = 2V_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_1'}{V_1} \right)^\gamma = \frac{P_1}{P_1'} = \frac{P_2}{P_2'} = \left(\frac{V_2'}{V_2} \right)^\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{V_1'}{V_1} = \frac{V_2'}{V_2} = \frac{V_1' + V_2'}{V_1 + V_2} = \frac{2V_0}{(3 - a^{-5})V_0} = \frac{2}{3 - a^{-5}}$$

$$\Rightarrow V_1' = \frac{2}{3 - a^{-5}} V_1 = \frac{2(3 - a^{-3} - a^{-5})}{3 - a^{-5}} V_0$$

$$V_2' = \frac{2}{3 - a^{-5}} V_2 = \frac{2a^{-3}}{3 - a^{-5}} V_0$$

$$\frac{P_1'}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_2'} \right)^\gamma = \frac{(3 - a^{-5})^{5/3}}{2^{5/3}} \Rightarrow P_1' = P_2' = P_3' = \frac{(3 - a^{-5})^{5/3}}{2^{5/3}} a^5 P_0 = \frac{(3a^3 - a^{-2})^{5/3}}{2^{5/3}} P_0$$

Nhiệt độ của các ng n:

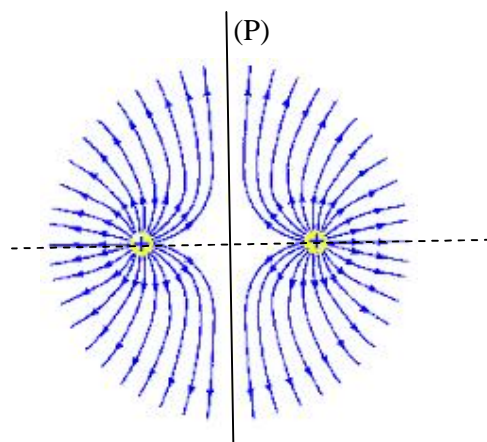
$$T_1' = \frac{P_1' V_1'}{nR} = \frac{(3a^3 - a^{-2})^{5/3}}{2^{5/3}} \frac{2(3 - a^{-3} - a^{-5})}{3 - a^{-5}} T_0 = \frac{(3 - a^{-5})^{2/3} (3 - a^{-3} - a^{-5}) a^5}{2^{2/3}} T_0$$

$$T_2' = \frac{P_2' V_2'}{nR} = \frac{(3a^3 - a^{-2})^{5/3}}{2^{5/3}} \frac{2a^{-3}}{3 - a^{-5}} T_0 = \frac{(3 - a^{-5})^{2/3} a^2}{2^{2/3}} T_0$$

$$T_3' = \frac{P_3' V_3'}{nR} = \frac{(3a^3 - a^{-2})^{5/3}}{2^{5/3}} T_0$$

Câu 3. [10 i m]

(a) Hình d ạng ường s ố nh hình v :



(b) C ường i n tr ường t i M:

i. Giá tr l ớn nh ỏ t c a E_M :

$$E_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q \cdot x}{(x^2 + L^2)^{3/2}}$$

$$E_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{(x^{4/3} + L^2 x^{-2/3})^{3/2}}$$

$$x^{4/3} + L^2 x^{-2/3} = x^{4/3} + \frac{L^2 x^{-2/3}}{2} + \frac{L^2 x^{-2/3}}{2} \geq 3 \sqrt[3]{x^{4/3} \cdot \frac{L^2 x^{-2/3}}{2} \cdot \frac{L^2 x^{-2/3}}{2}} = 3 \sqrt[3]{\frac{L^4}{4}} = 3 \left(\frac{L^{4/3}}{4^{1/3}} \right)$$

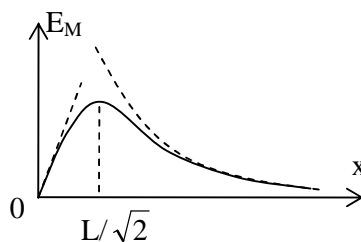
$$\Rightarrow E_M \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\left(3 \left(\frac{L^{4/3}}{4^{1/3}} \right)\right)^{3/2}} = \frac{q}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 L^2}$$

$$E_M = (E_M)_{\max} = \frac{q}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 L^2} = \frac{4kq}{3\sqrt{3}L^2} \Leftrightarrow x = L/\sqrt{2}$$

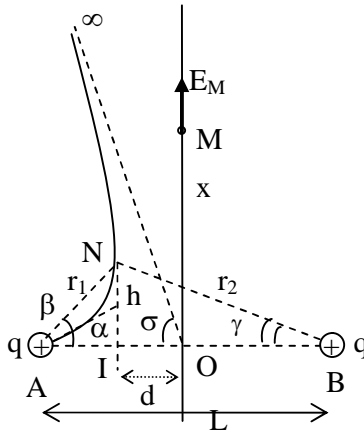
ii. th E_M theo x .

- Khi $x \ll L \rightarrow E_M$ t l thu n v i x .
- Khi $x \gg L \rightarrow E_M$ t l ngh ch v i x^2

\Rightarrow th E_M theo x :



(C) N là i m trên ường s ố ang xét và g n m t ph ường P nh t $\Rightarrow \vec{E}_N // (P)$



t: $\beta = \angle NAB; \gamma = \angle NBA$.

$$\Rightarrow \vec{E}_N // (P) \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \cos\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2} \cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r_1^2} \cos\beta = \frac{1}{r_2^2} \cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\beta}{h^2} \cos\beta = \frac{\sin^2\gamma}{h^2} \cos\gamma \quad \left(r_1 = \frac{h}{\sin\beta}; r_2 = \frac{h}{\sin\gamma} \right)$$

$$\rightarrow \cos\beta \sin^2\beta = \cos\gamma \sin^2\gamma$$

$$\rightarrow 1 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos\beta \cos\gamma \quad (1)$$

* i n thông g i qua m t hình tròn (I;h):

$$\Phi = \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(1-\cos\beta)}{4\pi} - \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(1-\cos\gamma)}{4\pi} = \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(\cos\gamma - \cos\beta)}{4\pi}$$

(Tính theo góc kh i hình nón nhìn t i các i n tích n vành tròn)

M t khác, do các ng s c không c t nhau nên i n thông này c ng b ng i n thông g i qua góc kh i c a hình nón có góc m là 2α t i n tích t i A (Chú ý r ng c ng i n tr ng do i n tích t i A gây ra t i i m g n sát A là r t l n so v i i n tr ng sinh ra b i i n tích t t i B). Do v y:

$$\Phi = \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(1-\cos\alpha)}{4\pi}$$

$$\rightarrow \cos X - \cos S = 1 - \cos r \quad (2)$$

Gi i h ph ng trình (1) và (2):

$$\Rightarrow \cos X + \cos S = \sqrt{(1+\cos r)(3-\cos r)} / 3$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{\sqrt{(1+\cos\alpha)(3-\cos\alpha)} / 3}{2} + \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{(1 + \cos \alpha)(3 - \cos \alpha)}/3}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

{ Ví d khi $r = 60^\circ \rightarrow \cos x = 7/8; \cos S = 3/8$ }

* Do ó, kho ng cách g n nh t t ng s c n m t ph ng P: $d = L - r_1 \cdot \cos \beta$

$$\text{ây: } \frac{r_1}{\sin x} = \frac{2L}{\sin(S + x)}.$$

$$\Rightarrow d = L - \frac{2L \sin \gamma \cos \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$$

(S d ng β và γ ã xác nh c trên)

ii. ng s c t i vô c c.

T ng t trên, ta có i n thông c a h xuyên qua áy hình nón có góc m là 2σ tính t tâm O (xem hình v) có th c xác nh b i các bi u th c:

$$\begin{cases} \Phi = \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(1 - \cos \alpha)}{4\pi} \\ \Phi = \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(\cos \sigma - \cos(\pi - \sigma))}{4\pi} = \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) \frac{2\pi(2 \cos \sigma)}{4\pi} \end{cases}$$

Do v y:

$$\Rightarrow \cos \sigma = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \sigma = \arccos \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)$$
